

مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	ساعات شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی و فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۲/۳/۳		سال سوم آموزش متوسطه	
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۲	

ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

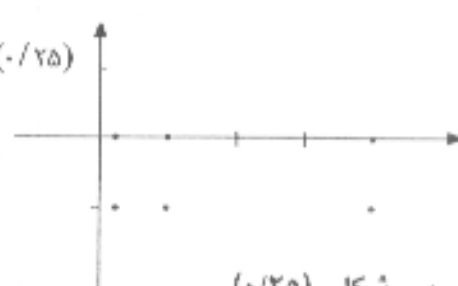
۱/۵	با استفاده از استقرای ریاضی ثابت کنید:	۱
	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (n \in \mathbb{N})$	
۱	اگر $x$ و $y$ دو عدد حقیقی باشند، ثابت کنید:	۲
	$x^x + y^y \geq 2(x + y - 1)$	
۱/۲۵	می‌دانیم $\sqrt{2}$ عدد گنگ است ثابت کنید عدد $1 + \sqrt{2}$ گنگ است. (برهان خلف)	۳
۱	از ۸۰۰ نفر دانش آموزان یک مدرسه حداقل چند دانش آموز در یک روز سال متولد شده اند؟ چرا؟ (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید.)	۴
۰/۲۵	با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید که اگر ۷ برابر یک عدد زوج را با یک عدد فرد جمع کنیم حاصل همواره عددی فرد است.	۵
۱/۲۵	با استفاده از جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:	۶
	$(A \cup B) - (B \cup C) = (A - B) - C$	
۱/۵	اگر $A = \{x^x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -1 \leq x \leq 1\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } x^x \leq 2\}$ ، عضوهای مجموعه‌ی $A \times B - A^x$ را مشخص کنید و نمودار آن را رسم کنید.	۷
۱/۲۵	رابطه‌ی $R$ روی $R^x$ به صورت رو به رو تعریف شده است.	۸
	$(x, y) R (z, t) \Leftrightarrow x^x - t^t = z^z - y^y$	
	الف) ثابت کنید $R$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. ب) کلاس هم‌ارزی $[(-2, 3)]$ را مشخص کنید.	
۰/۵	نمودار رابطه‌ی $R = \{(x, y) \in R^x \mid  x  \leq 1,  y  \leq 1\}$ را در دستگاه مختصات رسم کنید.	۹
« ادامه‌ی سؤالات در صفحه‌ی دوم »		

مدت امتحان: ۱۳۵ دقیقه	ساعت شروع: ۸ صبح	رشته: ریاضی و فیزیک	سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال
تاریخ امتحان: ۱۳۸۲/۲/۳		سال سوم آموزش متوسطه	
اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی		دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۲	

ردیف	سؤالات	نمره
------	--------	------

۱۰	سکه ای را پرتاب می کنیم اگر رو بیاید آنگاه تاس را می ریزیم و اگر پشت بیاید، سکه را دوبار دیگر پرتاب می کنیم مطلوب است تعیین: الف) فضای نمونه ای این پیشامد. ب) پیشامد $A$ که در آن دقیقاً یک بار سکه رو بیاید. ج) پیشامد $B$ به طوری که حداقل دو بار ظاهر شدن پشت در پرتاب سکه را نشان دهد. د) $A \cap B'$	۲
۱۱	۳ لامپ را از میان ۱۵ لامپ که ۵ عدد آنها بدون هیچگونه آثار خارجی معیوب می باشد انتخاب می کنیم تعیین کنید احتمال اینکه: الف) هیچکدام معیوب نباشند. ب) فقط یکی از لامپ ها معیوب باشد.	۱
۱۲	تاسی به گونه ای ساخته شده است که احتمال آمدن عددهای فرد پنج برابر احتمال آمدن عددهای زوج است احتمال آمدن هر کدام از اعداد را حساب کنید.	۱/۵
۱۳	نقطه‌ی $(x, y)$ را درون دایره $S = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ به تصادف انتخاب می کنیم احتمال اینکه نقطه‌ی مورد نظر در $A = \{(x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ باشد را تعیین کنید.	۱/۵
۱۴	سکه سالمی را ۱۰ بار پرتاب می کنیم، مطلوب است احتمال آن که ۷ بار رو بیاید.	۰/۵
۱۵	برای دو پیشامد $A$ و $B$ از فضای نمونه ای $S$ ثابت کنید: $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$	۱
۱۶	اگر $P(A \cup B) = \frac{6}{8}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ و $P(A') = \frac{3}{8}$ باشند مطلوب است محاسبه: الف) $P(B)$ ب) $P(B - A)$	۱/۵
	« موفق باشید »	
	جمع نمره	۲۰

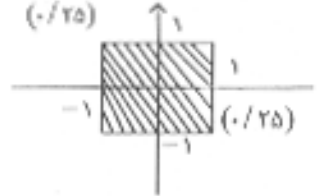
راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۸۴/۳/۳
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۴	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی
ردیف	راهنمای تصحیح

۱	$\left\{ \begin{aligned} P(1): \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (0/25) & \quad P(K): \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^K} = 1 - \frac{1}{2^K} \quad (0/25) \\ P(K+1): \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^K} + \frac{1}{2^{K+1}} = 1 - \frac{1}{2^{K+1}} \quad (0/5) \\ 1 - \frac{1}{2^K} + \frac{1}{2^{K+1}} = 1 + \frac{-2+1}{2^{K+1}} = 1 - \frac{1}{2^{K+1}} \quad (0/25) \end{aligned} \right.$
۲	$x^2 + y^2 \geq 2(x+y-1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 - 2y + 1 \geq 0 = (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 0$ <p style="text-align: center;">(0/25) (0/25) (0/25) (0/25)</p> <p style="text-align: right;">همواره برقرار است.</p>
۳	<p>از برهان خلف استفاده می کنیم پس اگر <math>1 + \sqrt{2}</math> اصم نباشد آنگاه گویا ست: (0/25)</p> $\left\{ \begin{aligned} a, b \in \mathbb{Z} \\ b \neq 0 \end{aligned} \right. \quad 1 + \sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad (0/25) \quad \sqrt{2} = \frac{a}{b} - 1 \quad (0/25) \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{a-b}{b} \quad (0/25) \quad \sqrt{2} = \frac{p}{q}$ <p style="text-align: right;">(0/25) تناقض</p>
۴	<p>هر سال ۳۶۵ روز است اگر دانش آموزان را به منزله کیبوتر و روزهای سال را به منزله لانه کیبوتر در نظر بگیریم <math>365 \times 800</math> طبق اصل لانه کیبوتر، (0/25)</p> <p>حداقل ۳ دانش آموز در یک روز سال متولد شده اند (0/5)</p> $800 \mid \frac{365}{4} \quad (0/25) \quad 2+1=3$
۵	$\forall (2k) + 2k' + 1 = 2k + 2k' + 1 = 2 \left( \frac{2k+2k'}{2} \right) + 1 = 2q + 1 \quad k, k' \in \mathbb{Z}$ <p style="text-align: center;">(0/25) (0/25) (0/25)</p>
۶	<p>طرف اول <math>(A \cup B) - (B \cup C) = (A \cup B) \cap (B \cup C)^c = (A \cup B) \cap (B^c \cap C^c) = [(A \cup B) \cap B^c] \cap C^c</math></p> <p style="text-align: center;">(0/25) (0/25) (0/25)</p> <p>طرف دوم <math>= [(A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)] \cap C^c = [(A \cap B^c) \cup \emptyset] \cap C^c = (A \cap B^c) \cap C^c = (A - B) - C</math></p> <p style="text-align: center;">(0/25) (0/25) (0/25) (0/25)</p>
۷	$A = \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2 \right\} \quad (0/25) \quad B = \{-1, 0, 1\} \quad (0/25)$ $A \times B = \left\{ (x, y) \mid x \in A, y \in B \right\} \quad A^c = \left\{ (x, y) \mid x \in A, y \in A \right\}$ $A \times B = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (2, -1), (2, 0), (2, 1) \right\} \quad (0/25)$ $A^c = \left\{ \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{2}, 2\right), \left(1, \frac{1}{2}\right), (1, 1), (1, 2), \left(2, \frac{1}{2}\right), (2, 1), (2, 2) \right\} \quad (0/25)$ $A \times B - A^c = \left\{ \left(\frac{1}{2}, -1\right), \left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, -1), (1, 0), (2, -1), (2, 0) \right\} \quad (0/25)$ <div style="text-align: right;">  <p>رسم شکل (0/25)</p> </div>
«ادامه در صفحه‌ی دوم»	

راهنمای تصحیح سوالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۸۲/۳/۳
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۲	آثاره گل سنجش و ارزشیابی تحصیلی
ردیف	راهنمای تصحیح

الف) $(x, y) R(z, t) \Leftrightarrow x^r - t^r = z^r - y^r$ $(x, y) R(x, y) \Leftrightarrow x^r - y^r = x^r - y^r \quad (./\gamma\delta) \quad (1)$ $(x, y) R(z, t) \Leftrightarrow x^r - t^r = z^r - y^r \quad (./\delta) \quad (2)$ $(z, t) R(x, y) \Leftrightarrow z^r - y^r = x^r - t^r$ $(x, y) R(z, t) \text{ و } (z, t) R(m, n) \Rightarrow (x, y) R(m, n)$ $x^r - t^r = z^r - y^r$ $z^r - n^r = m^r - t^r$ طرفین را جمع می کنیم $x^r - t^r + z^r - n^r = z^r - y^r + m^r - t^r$ $\Rightarrow x^r - n^r = m^r - y^r \quad (./\delta) \quad (3)$ از (1) و (2) و (3) نتیجه می گیریم R یک رابطه‌ی هم ارزی است.	۸
ب) $[(-2, 2)] = \{(x, y) \mid (x, y) R(-2, 2)\} = \{(x, y) \mid x^r - 2^r = (-2)^r - y^r \Rightarrow x^r + y^r = 1\} \quad (./\delta)$	

$R = \{(x, y) \in R^r \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\} \quad (./\gamma\delta)$	۹
---	---

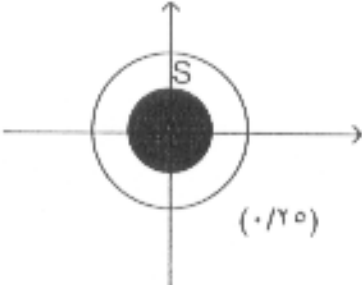


الف) $S = \{(.,.), (.,\gamma), (.,\delta), (.,\epsilon), (.,\zeta), (.,\eta), (.,\theta), (.,\iota), (.,\kappa), (.,\lambda), (.,\mu), (.,\nu), (.,\xi), (.,\omicron), (.,\pi), (.,\rho), (.,\sigma), (.,\tau), (.,\upsilon), (.,\phi), (.,\chi), (.,\psi), (.,\omega)\} \quad (./\delta)$	۱۰
ب) $A = \{(.,.), (.,\gamma), (.,\delta), (.,\epsilon), (.,\zeta), (.,\eta), (.,\theta), (.,\iota), (.,\kappa), (.,\lambda), (.,\mu), (.,\nu), (.,\xi), (.,\omicron), (.,\pi), (.,\rho), (.,\sigma), (.,\tau), (.,\upsilon), (.,\phi), (.,\chi), (.,\psi), (.,\omega)\} \quad (./\delta)$	
ج) $B = \{(.,\gamma), (.,\delta), (.,\epsilon), (.,\zeta), (.,\eta), (.,\theta), (.,\iota), (.,\kappa), (.,\lambda), (.,\mu), (.,\nu), (.,\xi), (.,\omicron), (.,\pi), (.,\rho), (.,\sigma), (.,\tau), (.,\upsilon), (.,\phi), (.,\chi), (.,\psi), (.,\omega)\} \quad (./\delta)$	
د) $B' = \{(.,.), (.,\gamma), (.,\delta), (.,\epsilon), (.,\zeta), (.,\eta), (.,\theta), (.,\iota), (.,\kappa), (.,\lambda), (.,\mu), (.,\nu), (.,\xi), (.,\omicron), (.,\pi), (.,\rho), (.,\sigma), (.,\tau), (.,\upsilon), (.,\phi), (.,\chi), (.,\psi), (.,\omega)\} \quad (./\gamma\delta)$	
$A \cap B' = \{(.,.), (.,\gamma), (.,\delta), (.,\epsilon), (.,\zeta), (.,\eta), (.,\theta), (.,\iota), (.,\kappa), (.,\lambda), (.,\mu), (.,\nu), (.,\xi), (.,\omicron), (.,\pi), (.,\rho), (.,\sigma), (.,\tau), (.,\upsilon), (.,\phi), (.,\chi), (.,\psi), (.,\omega)\} \quad (./\gamma\delta)$	

$n(s) = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (./\gamma\delta) \quad \text{الف) } P(A) = \frac{\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}} \quad (./\gamma\delta) \quad \text{ب) } P(B) = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 15 \\ 3 \end{pmatrix}} \quad (./\delta)$	۱۱
--	----

$P(\gamma) = P(\delta) = P(\epsilon) = W \quad P(\eta) = P(\theta) = P(\iota) = 5W \quad (./\gamma\delta)$ $P(\eta) + P(\theta) + P(\iota) + P(\kappa) + P(\lambda) + P(\mu) + P(\nu) = 1 \quad (./\gamma\delta)$ $5W + W + 5W + W + 5W + W = 1 \quad (./\gamma\delta) \quad 18W = 1 \quad W = \frac{1}{18} \quad (./\gamma\delta)$ $P(\eta) = P(\theta) = P(\iota) = 5(\frac{1}{18}) = \frac{5}{18} \quad (./\gamma\delta) \quad P(\kappa) = P(\lambda) = P(\mu) = \frac{1}{18} \quad (./\gamma\delta)$	۱۲
---	----

راهنمای تصحیح سؤالات امتحان نهایی درس: جبر و احتمال	رشته: ریاضی و فیزیک
سال سوم آموزش متوسطه	تاریخ امتحان: ۱۳۸۴/۳/۳
دانش آموزان و داوطلبان آزاد سراسر کشور در نوبت دوم (خرداد ماه) سال ۱۳۸۴	اداره کل سنجش و ارزشیابی تحصیلی
ردیف	راهنمای تصحیح

۱۳	$a(s) = \pi R^2 = \pi (r^2) = 4\pi \quad (0/5)$ $a(A) = \pi R^2 = \pi (r^2) = \pi \quad (0/25)$ $P(A) = \frac{a(A)}{a(s)} = \frac{\pi}{4\pi} = \frac{1}{4} \quad (0/5)$ 
۱۴	$P(A) = \frac{\binom{10}{7}}{2^{10}} \quad (0/5)$
۱۵	<p>می دانیم <math>A = (A - B) \cup (A \cap B) \quad (0/25)</math>  <math>= (A \cap B') \cup (A \cap B) \quad (0/25)</math></p> <p>از طرفی دو پیشامد <math>A \cap B</math> و <math>A \cap B'</math> از هم جدا هستند. لذا داریم:</p> $P(A) = P(A \cap B') + P(A \cap B) \quad (0/25)$ $P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) \quad (0/25)$
۱۶	$P(A') = \frac{3}{8} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \quad (0/25)$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (0/25)$ <p>الف) <math>\frac{6}{8} = \frac{5}{8} + P(B) - \frac{1}{8} \quad (0/25)</math> <math display="block">P(B) = \frac{11}{24} \quad (0/25)</math></p> <p>ب) <math>P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \quad (0/25)</math></p> $P(B - A) = \frac{11}{24} - \frac{1}{8} \Rightarrow \frac{11-3}{24} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3} \quad (0/25)$
جمع نمره	۲۰